

Gelijkvormigheid

Oefenboekje • Hoofdstuk 9, Titel 2 & 3 • Wiskunde • 3de jaar

Hoe gebruik je dit oefenboekje?

Dit boekje gaat over **gelijkvormige figuren** (Titel 2) en **gelijkvormige driehoeken** (Titel 3). Homothetieën (Titel 1) en de stelling van Thales (Titel 4) horen **niet** bij de examenstof en staan er dus niet in.

Het bouwt op in **zeven niveaus**. Werk ze in volgorde af:

1. **Eenvoudig met tips** - een stap per oefening; de tip zegt welke regel je nodig hebt.
2. **Moeilijker met tips** - twee stapjes, nog steeds met een tip.
3. **Eenvoudig zonder tips** - zelfde moeilijkheid als niveau 1, maar je kiest zelf de regel.
4. **Moeilijker zonder tips** - twee stappen, zonder hulp.
5. **Expert** - meerdere stappen in een opgave.
6. **Instinkers** - opgaven die je expres op het verkeerde been zetten. Lees twee keer!
7. **Examenklaar** - oefeningen op het niveau en in de stijl van de cursus.

Werkwijze: schrijf je volledige uitwerking in het **witte vak** en je eindantwoord op de regel '**Antwoord**'. Maak eerst niveau 1 en 2 helemaal af voor je naar niveau 3 gaat. Controleer telkens: is je antwoord groter dan het origineel als $r > 1$, en kleiner als $0 < r < 1$?

Voor de ouder: bij dit boekje hoort een apart oplossingenblad. Daarop staan niet alleen de antwoorden met tussenstappen, maar ook concrete vragen die je kan stellen om te helpen *zonder* het antwoord te verklappen.

Stappenplan - hoe pak je een oefening aan?

1. Lees wat gevraagd wordt: een **factor r**, een **lengte**, een **oppervlakte**, een **volume**, of **of twee figuren gelijkvormig zijn**?
2. Welke zijden/hoeken horen bij elkaar? Volg de **zelfde lettervolgorde** (bij ABC ~ DEF hoort |AB| bij |DE|).
3. Bereken **r** met een volledig gekend paar zijden: $r = \text{zijde beeld} / \text{zijde origineel}$.
4. Lengte gevraagd? → keer **r**. Oppervlakte? → keer **r^2** . Volume? → keer **r^3** .
5. Moet je **r** uit een oppervlakte halen? **r = wortel** van de oppervlakteverhouding. Uit een volume? **r = derdemachtswortel** van de volumeverhouding.
6. Twee driehoeken gelijkvormig? Zoek een **kenmerk**: ZZZ, HH of ZHZ.

De regelkaart

Begrip	Regel
Overeenkomstige hoeken	even groot (bij gelijkvormige figuren)
Overeenkomstige zijden	evenredig; $r = \text{zijde beeld} / \text{zijde origineel}$
Factor r	$r > 1$: groter $r = 1$: congruent $0 < r < 1$: kleiner. r is altijd positief.
Omtrek / lengte	$P_2 / P_1 = r$
Oppervlakte	$A_2 / A_1 = r^2$
Volume	$V_2 / V_1 = r^3$
Schaal	werkelijkheid = tekening · noemer van de schaal

De 3 gelijkvormigheidskenmerken van driehoeken

Kenmerk	Wanneer zijn de driehoeken gelijkvormig?
ZZZ	Drie paar overeenkomstige zijden zijn evenredig.
HH	Twee paar overeenkomstige hoeken zijn gelijk.
ZHZ	Twee paar overeenkomstige zijden zijn evenredig EN de ingesloten hoeken zijn gelijk.

Altijd, soms of nooit gelijkvormig?

	Voorbeelden
ALTIJD	twee vierkanten • twee cirkels • twee gelijkzijdige driehoeken • twee kubussen • twee bollen
SOMS	twee rechthoeken • twee gelijkbenige driehoeken • twee ruiten • twee cilinders
NOOIT	een gelijkzijdige en een rechthoekige driehoek

Let op de drie grootste valkuilen!

- Oppervlakte gaat met **r^2** , volume met **r^3** - niet met **r**.
- De factor **r** is **altijd positief** (nooit negatief).
- Noteer overeenkomstige zijden in **dezelfde lettervolgorde**.

Niveau 1 • Eenvoudig - met tips

Een stap per oefening. De tip zegt welke regel je nodig hebt.

1.1 Twee gelijkvormige figuren. Een zijde van het origineel is 5 cm; de overeenkomstige zijde van het beeld is 15 cm. Bereken de gelijkvormigheidsfactor r .

Tip: $r = \text{lengte van het beeld gedeeld door lengte van het origineel}$.

Antwoord:

1.2 Rechthoek A'B'C'D' is het beeld van rechthoek ABCD met factor $r = 4$. De zijde $|AB| = 3$ cm. Hoe lang is de overeenkomstige zijde $|A'B'|$?

Tip: zijde van het beeld = r keer de zijde van het origineel.

Antwoord:

1.3 Twee gelijkvormige figuren met factor $r = 3$. De omtrek van de kleine figuur is 8 cm. Bereken de omtrek van de grote figuur.

Tip: omtrekken (en alle lengtes) verhouden zich net als de zijden: keer r .

Antwoord:

1.4 Twee gelijkvormige figuren met factor $r = 2$. De oppervlakte van de kleine figuur is 7 cm^2 . Bereken de oppervlakte van de grote figuur.

Tip: oppervlakten verhouden zich als r^2 (het kwadraat van r).

Antwoord:

1.5 Twee gelijkvormige lichamen met factor $r = 2$. Het volume van het kleine lichaam is 5 cm^3 . Bereken het volume van het grote lichaam.

Tip: volumes verhouden zich als r^3 (de derde macht van r).

Antwoord:

1.6 Zijn twee willekeurige vierkanten altijd, soms of nooit gelijkvormig? Leg kort uit.

Tip: denk aan de hoeken (allemaal 90°) en of de zijden in dezelfde verhouding staan.

Antwoord:

Niveau 2 • Moeilijker - met tips

Twee stapjes. De tip helpt je op weg.

2.1 driehoek ABC ~ driehoek PQR. $|AB| = 6$, $|PQ| = 9$ en $|BC| = 8$. Bereken $|QR|$.

Tip: bereken eerst r met het paar zijden dat je volledig kent ($|AB|$ en $|PQ|$).

Antwoord:

2.2 driehoek ABC heeft hoek A = 50° en hoek B = 60° . driehoek DEF heeft hoek D = 50° en hoek E = 60° . Zijn de driehoeken gelijkvormig? Met welk kenmerk?

Tip: twee paar gelijke hoeken is al genoeg. Welk kenmerk hoort daarbij?

Antwoord:

2.3 Driehoek 1 heeft zijden 3, 4 en 5. Driehoek 2 heeft zijden 9, 12 en 15. Zijn ze gelijkvormig? Met welk kenmerk en welke factor?

Tip: controleer of ALLE drie de verhoudingen van overeenkomstige zijden gelijk zijn.

Antwoord:

2.4 Twee gelijkvormige figuren. De oppervlakte van de grote is 9 keer die van de kleine. Bereken de gelijkvormigheidsfactor r .

Tip: de oppervlakteverhouding = r^2 , dus r = de vierkantswortel ervan.

Antwoord:

2.5 Op een plattegrond met schaal 1 : 200 is een muur 4 cm lang. Hoe lang is de muur in werkelijkheid? (in meter)

Tip: werkelijkheid = tekening keer de noemer van de schaal. Zet daarna om naar meter.

Antwoord:

2.6 Twee gelijkvormige lichamen. Het grote heeft 8 keer het volume van het kleine. Bereken r .

Tip: de volumeverhouding = r^3 , dus r = de derdemachtswortel ervan.

Antwoord:

Niveau 3 • Eenvoudig - zonder tips

Zelfde soort als niveau 1, maar nu kies je zelf de regel.

3.1 Origineel zijde 4 cm, overeenkomstige beeldzijde 10 cm. Bereken r .

Antwoord:

3.2 driehoek ABC $\sim$ driehoek DEF met $r = 3$. $|AB| = 7$. Bereken $|DE|$.

Antwoord:

3.3 Twee gelijkvormige figuren met $r = 5$. Omtrek klein = 6 cm. Bereken de omtrek van de grote.

Antwoord:

3.4 Twee gelijkvormige figuren met $r = 3$. Oppervlakte klein = 4 cm^2 . Bereken de oppervlakte van de grote.

Antwoord:

3.5 Twee gelijkvormige lichamen met $r = 3$. Volume klein = 2 cm^3 . Bereken het volume van het grote.

Antwoord:

3.6 Zijn twee willekeurige cirkels altijd, soms of nooit gelijkvormig? Leg kort uit.

Antwoord:

Niveau 4 • Moeilijker - zonder tips

Twee stappen, nu zelfstandig.

4.1 driehoek ABC ~ driehoek KLM. $|AB| = 10$, $|KL| = 4$ en $|AC| = 15$. Bereken $|KM|$.

Antwoord:

4.2 Driehoek 1: $|AB| = 4$, $|AC| = 6$ en de ingesloten hoek A = 70° . Driehoek 2: $|DE| = 6$, $|DF| = 9$ en de ingesloten hoek D = 70° . Gelijkvormig? Welk kenmerk?

Antwoord:

4.3 driehoek ABC ~ driehoek PQR met $r = 2,5$. De omtrek van driehoek ABC is 12 cm. Bereken de omtrek van driehoek PQR.

Antwoord:

4.4 Twee gelijkvormige figuren. $A_{\text{groot}} = 49 \text{ cm}^2$ en $A_{\text{klein}} = 16 \text{ cm}^2$. Bereken r .

Antwoord:

4.5 Een maquette van een gebouw is gemaakt op schaal 1 : 50. Een raam op de maquette is 3 cm hoog. Hoe hoog is het echte raam? (in meter)

Antwoord:

4.6 Twee gelijkvormige kubussen. De grote heeft volume 64 cm^3 , de kleine 8 cm^3 . Bereken r .

Antwoord:

Niveau 5 • Expert

Meerdere stappen in een opgave. Lees goed en stop niet te vroeg.

5.1 Twee gelijkvormige vazen met factor $r = 3$. De kleine vaas heeft een oppervlakte van 200 cm^2 en een inhoud van 0,5 liter. Bereken de oppervlakte EN de inhoud van de grote vaas.

Antwoord:

5.2 Marius (1,50 m) staat naast een boom. Zijn schaduw is 2 m lang, de schaduw van de boom 9 m. De zon valt onder dezelfde hoek, dus de driehoeken zijn gelijkvormig. Bereken de hoogte van de boom.

Antwoord:

5.3 De lijnstukken $[AC]$ en $[BD]$ snijden elkaar in S . Er geldt: driehoek $SAB \sim$ driehoek SCD (overstaande hoeken in S , en $AB \parallel CD$). $|SA| = 4$, $|SB| = 5$ en $|SC| = 12$. Bereken $|SD|$.

Antwoord:

5.4 In driehoek ABC ligt D op $[AB]$ en E op $[AC]$, met $DE \parallel BC$. Daardoor is driehoek $ADE \sim$ driehoek ABC . $|AD| = 3$, $|AB| = 8$ en $|DE| = 4,5$. Bereken $|BC|$.

Antwoord:

5.5 Een schaalmodel van een auto is gemaakt op schaal 1 : 18. Het model heeft 600 cm^2 lak nodig. Hoeveel m^2 lak heeft de echte auto nodig? ($1 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$)

Antwoord:

5.6 Twee gelijkvormige figuren. De oppervlakte van de grote is 144 cm^2 , die van de kleine 36 cm^2 . De omtrek van de kleine is 24 cm. Bereken (a) de factor r en (b) de omtrek van de grote figuur.

Antwoord:

Niveau 6 • Instinkers - let op de valstrikken!

Opgaven die je expres op het verkeerde been zetten. Lees twee keer en controleer.

6.1 Waar of niet waar? 'Als je alle zijden van een figuur verdubbelt, wordt de oppervlakte 2 keer zo groot.' Verklaar.

Antwoord:

6.2 Waar of niet waar? 'Als je alle ribben van een kubus 3 keer zo lang maakt, wordt het volume 9 keer zo groot.' Verklaar.

Antwoord:

6.3 Waar of niet waar? 'Twee rechthoeken met dezelfde omtrek zijn altijd gelijkvormig.' Verklaar.

Antwoord:

6.4 Gegeven driehoek ABC ~ driehoek DEF. Iemand schrijft $|AB| / |EF| = r$. Klopt dat? Verklaar.

Antwoord:

6.5 Waar of niet waar? 'Twee gelijkbenige driehoeken zijn altijd gelijkvormig.' Verklaar.

Antwoord:

6.6 Kan de gelijkvormigheidsfactor r gelijk zijn aan -2 ? Verklaar.

Antwoord:

Niveau 7 • Examenklaar - zoals in de cursus

Op het niveau en in de stijl van de cursusoefeningen. Combineer alles. Tip van de lerares: hermaak ook de oefeningen uit de les.

7.1 driehoek ABC ~ driehoek DEF. Gegeven: $|AB| = 25$, $|AC| = 15$, $|DE| = 5$ en $|EF| = 6$. Bereken r , $|BC|$ en $|DF|$.

Antwoord:

7.2 Een schaalmodel van een virus heeft een diameter van 8 cm. Het echte virus heeft een diameter van 80 nanometer ($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$). Bereken de gelijkvormigheidsfactor.

Antwoord:

7.3 In een rechthoekige driehoek ABC zijn de rechthoekszijden $[AB]$ en $[AC]$ gelijk aan 3 en 5. In een rechthoekige driehoek TME met hoek $M = 90^\circ$ is $|ME| = 6$. Bereken $|MT|$ zodat de driehoeken gelijkvormig zijn. Geef ALLE oplossingen.

Antwoord:

7.4 Twee gelijkvormige cilinders. De kleine heeft straal 4,5 cm en hoogte 12 cm. De grote heeft een volume dat 8 keer zo groot is. Bereken (a) de factor r en (b) de hoogte van de grote cilinder.

Antwoord:

7.5 Een driehoekig perceel ABC staat op een kaart met schaal 1 : 1000. Op de kaart is de oppervlakte van de driehoek 12 cm^2 . Bereken de werkelijke oppervlakte in m^2 . ($1 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$)

Antwoord:

7.6 driehoek ABC en driehoek EDC zijn rechthoekig met de rechte hoeken in A en E. De punten A, C en E liggen op een rechte; de hoeken bij C zijn overstaande hoeken. (a) Toon aan dat de driehoeken gelijkvormig zijn. (b) Bereken $|DE|$ als $|AB| = 6$, $|AC| = 4$ en $|CE| = 10$.

Antwoord: