

Museumbeveiliging

Oefenboekje • extra bundel • optica & analytische meetkunde • Wiskunde • 3de jaar

Waar gaat dit over?

Een laser vertrekt in punt A, kaatst via **spiegel 1** (draaipunt B) en **spiegel 2** (draaipunt C) en moet exact op de sensor (LDR) in punt E vallen. Je beschrijft elk stuk van de straal met de **vergelijking van een rechte** en vindt snijpunten met een **stelsel**. Dat is precies de leerstof analytische meetkunde, in een echte context.

Belangrijk – wat moet je op het examen kunnen? Volgens de leerkracht krijg je de **hellingshoek van r_2** ($= \gamma$, het resultaat van stap 1) **gegeven**. Jij voert **stap 2 t.e.m. 5** uit:

2. de vergelijking van r_2 (rico = $\tan \gamma$ + punt B);
3. de vergelijking van s_2 (drager spiegel 2 – een dalende rechte, rico = $\tan(-\beta)$);
4. het snijpunt D (stelsel van r_2 en s_2);
5. de hellingshoek τ van r_3 (de spiegelregel).

Stap 6–7 (vergelijking r_3 + snijpunt E met de muur) zijn de **volledige afwerking** tot aan de sensor. Ze gebruiken dezelfde technieken als stap 2 en 4 en zitten als bonus in dit boekje.

Werkwijze: schrijf je volledige uitwerking in het **witte vak** en je eindantwoord op de regel '**Antwoord**'. Zet je rekenmachine op **DEG** (graden). Reken met volle precisie en rond pas het eindantwoord af op **4 beduidende cijfers**.

Voor de ouder: bij dit boekje hoort een apart oplossingenblad met de volledig uitgewerkte stappen *en* een socratische vragenladder – vragen die je kan stellen om te helpen *zonder* het antwoord te verklappen.

Het stappenplan (algoritme)

Stap	Wat	Wie
1	Hellingshoek γ van r_2 bepalen	GEGEVEN op het examen
2	Vergelijking van r_2 : rico = $\tan\gamma$, door punt B	jij
3	Vergelijking van s_2 : rico = $\tan(-\beta)$, door punt C	jij
4	Snijpunt D: stelsel r_2 & s_2 (gelijkstelling)	jij
5	Hellingshoek τ van r_3 : spiegelregel	jij
6	Vergelijking van r_3 : rico = $\tan\tau$, door punt D	afwerking
7	Snijpunt E: stelsel r_3 & de muur	afwerking

De regelkaart

Begrip	Regel
Vergelijking rechte (1 punt + rico m)	$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$
Vergelijking rechte (1 punt + hellingshoek)	$y - y_1 = \tan\alpha \cdot (x - x_1)$
Vergelijking rechte (2 punten)	rico $a = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$
Rico uit hellingshoek	rico = $\tan(\text{hellingshoek})$
Stijgende / dalende rechte	stijgend $\rightarrow$ rico > 0 dalend $\rightarrow$ rico < 0
Drager spiegel 2 (dalend!)	hellingshoek = $-\beta \rightarrow$ rico = $\tan(-\beta) = -\tan\beta$
Spiegelregel (weerkaatsing)	hellingshoek uit = $2 \cdot (\text{hellingshoek spiegel}) - (\text{hellingshoek in})$
... voor spiegel 2	$\tau = 2 \cdot (-\beta) - \gamma = -2\beta - \gamma$ (tel $+180^\circ$ op voor dezelfde rechte)
Snijpunt twee rechten	stelsel oplossen (gelijkstelling: rechterleden gelijkstellen)
Hellingshoek noteren	altijd tussen -90° en $+90^\circ$

De drie grootste valkuilen!

- Spiegel 2 is een **dalende** rechte $\rightarrow$ rico = $\tan(-\beta)$ is **negatief**.
- Komt τ uit de spiegelregel buiten $[-90^\circ, 90^\circ]$? Tel **$+180^\circ$** op – het is dezelfde rechte.
- Rond **pas op het einde** af (4 beduidende cijfers), nooit tussendoor.

Niveau 1 • Bouwstenen – met tips

Elke deelvaardigheid apart: rico uit een hoek, een rechte opstellen, een dalende spiegel, een stelsel, de spiegelregel en het snijpunt met de muur.

1.1 De gegeven hellingshoek van r_2 is $\gamma = 6^\circ$. Bereken de richtingscoëfficiënt (rico) van r_2 . Rond op 3 cijfers na de komma.

Tip: rico = $\tan(\text{hellingshoek})$. Zet je rekenmachine op DEG.

Antwoord:

1.2 Stel de vergelijking op van de rechte door $B(-1 ; 2)$ met rico 0,5. Schrijf in de vorm $y = ax + b$.

Tip: gebruik $y - y_1 = a \cdot (x - x_1)$ en werk uit.

Antwoord:

1.3 Spiegel s_2 is een **dalende** rechte met draaihoek $\beta = 35^\circ$. Bereken de rico van s_2 . Rond op 3 cijfers na de komma.

Tip: dalend $\rightarrow$ hellingshoek = $-\beta$, dus rico = $\tan(-35^\circ)$. De uitkomst is negatief!

Antwoord:

1.4 Los het stelsel op met de gelijkstellingsmethode en geef het snijpunt:

$$y = 0,2x + 3 \quad \& \quad y = -1,5x + 8.$$

Tip: stel de rechterleden gelijk: $0,2x + 3 = -1,5x + 8$. Los op naar x , vul daarna x in om y te vinden.

Antwoord:

1.5 De hellingshoek van r_2 is $\gamma = 4^\circ$ en de draaihoek van spiegel 2 is $\beta = 55^\circ$. Bereken met de spiegelregel de hellingshoek τ van r_3 .

Tip: $\tau = 2 \cdot (-\beta) - \gamma = -2\beta - \gamma$. Tel daarna $+180^\circ$ op om dezelfde rechte met een gewone hellingshoek te schrijven.

Antwoord:

1.6 De rechte r_3 heeft rico 1,2 en gaat door $D(2 ; 5)$. Waar snijdt ze de muur $y = -1$? Geef de coördinaten van E.

Tip: stel eerst r_3 op ($y - 5 = 1,2(x - 2)$), vul daarna $y = -1$ in en los op naar x .

Antwoord:

Niveau 2 • Volledige opgave – met tips

Nu de hele keten stap 2 t.e.m. 5 in één opgave, met een tip die je op weg helpt. Eindig bij de hellingshoek τ van r_3 .

2.1 Gegeven: hellingshoek van r_2 : $\gamma = 6^\circ$ (dit krijg je op het examen) • draaihoek spiegel 2: $\beta = 50^\circ$ • draaipunt spiegel 1: B $(-2 ; 1)$ • draaipunt spiegel 2: C $(2 ; 1)$

Gevraagd: voer stap 2 t.e.m. 5 uit: stel r_2 en s_2 op, bereken snijpunt D, en bepaal de hellingshoek τ van r_3 .

Tip: stap 2 gebruikt $\text{rico} = \tan \gamma$ en punt B. Stap 3: s_2 daalt, dus $\text{rico} = \tan(-\beta)$. Stap 4: gelijkstelling. Stap 5: $\tau = -2\beta - \gamma$, daarna $+180^\circ$.

Antwoord:

2.2 Gegeven: hellingshoek van r_2 : $\gamma = 3^\circ$ (dit krijg je op het examen) • draaihoek spiegel 2: $\beta = 55^\circ$ • draaipunt spiegel 1: B $(-3 ; 2)$ • draaipunt spiegel 2: C $(1 ; 2)$

Gevraagd: voer stap 2 t.e.m. 5 uit: stel r_2 en s_2 op, bereken snijpunt D, en bepaal de hellingshoek τ van r_3 .

Tip: werk netjes per stap. Controleer dat de rico van s_2 negatief is.

Antwoord:

Niveau 3 • Zonder tips

Zelfde soort opgaven, nu kies je zelf elke stap. Opgave 3.2 werk je volledig af tot het sensorpunt E.

3.1 Gegeven: hellingshoek van r_2 : $\gamma = 8^\circ$ (dit krijg je op het examen) • draaihoek spiegel 2: $\beta = 48^\circ$ • draaipunt spiegel 1: B $(-2 ; 0,5)$ • draaipunt spiegel 2: C $(2,5 ; 0,5)$

Gevraagd: voer stap 2 t.e.m. 5 uit: stel r_2 en s_2 op, bereken snijpunt D, en bepaal de hellingshoek τ van r_3 .

Antwoord:

3.2 Gegeven: hellingshoek van r_2 : $\gamma = 5^\circ$ (dit krijg je op het examen) • draaihoek spiegel 2: $\beta = 52^\circ$ • draaipunt spiegel 1: B $(-2 ; 1)$ • draaipunt spiegel 2: C $(2 ; 1)$ • de muur staat op $y = -1$

Gevraagd: voer stap 2 t.e.m. 5 uit (r_2 , s_2 , D en τ) en werk daarna af tot het sensorpunt E (stap 6–7).

Antwoord:

Niveau 4 • Moeilijker – tot aan de sensor

Volledige keten tot punt E. In opgave 4.2 is de gegeven hellingshoek γ negatief: r_2 is dan een dalende straal.

4.1 Gegeven: hellingshoek van r_2 : $\gamma = 4^\circ$ (dit krijg je op het examen) • draaihoek spiegel 2: $\beta = 60^\circ$ • draaipunt spiegel 1: B $(-2,5 ; 1,5)$ • draaipunt spiegel 2: C $(2 ; 1,5)$ • de muur staat op $y = -2$
Gevraagd: voer stap 2 t.e.m. 5 uit (r_2 , s_2 , D en τ) en werk daarna af tot het sensorpunt **E** (stap 6–7).

Antwoord:

4.2 Gegeven: hellingshoek van r_2 : $\gamma = -6^\circ$ (dit krijg je op het examen) • draaihoek spiegel 2: $\beta = 58^\circ$ • draaipunt spiegel 1: B $(-3 ; 2)$ • draaipunt spiegel 2: C $(1,5 ; 2)$ • de muur staat op $y = -1$
Gevraagd: voer stap 2 t.e.m. 5 uit (r_2 , s_2 , D en τ) en werk daarna af tot het sensorpunt **E** (stap 6–7).

Antwoord:

Niveau 5 • Expert

Een verticale muur en bewust 'lelijke' getallen. Reken het eindpunt af op 4 beduidende cijfers, net zoals in het 'lopend vuurtje' van de bundel.

5.1 Gegeven: hellingshoek van r_2 : $\gamma = 7^\circ$ (dit krijg je op het examen) • draaihoek spiegel 2: $\beta = 58^\circ$ • draaipunt spiegel 1: B $(-2 ; 1)$ • draaipunt spiegel 2: C $(2,2 ; 1)$ • de muur staat op $x = 4$

Gevraagd: voer stap 2 t.e.m. 5 uit (r_2 , s_2 , D en τ) en werk daarna af tot het sensorpunt **E** (stap 6–7).

De muur staat hier **rechts** (verticaal, $x = 4$). Stap 7 vul je dan $x = 4$ in.

Antwoord:

5.2 Gegeven: hellingshoek van r_2 : $\gamma = 9,5^\circ$ (dit krijg je op het examen) • draaihoek spiegel 2: $\beta = 62^\circ$ • draaipunt spiegel 1: B $(-1,8 ; 1,2)$ • draaipunt spiegel 2: C $(2,4 ; 1,2)$ • de muur staat op $y = -1,8$

Gevraagd: voer stap 2 t.e.m. 5 uit (r_2 , s_2 , D en τ) en werk daarna af tot het sensorpunt **E** (stap 6–7).

Reken het eindpunt E af op **4 beduidende cijfers**.

Antwoord:

Niveau 6 • Instinkers – let op de valstrikken!

Opgaven die je expres op het verkeerde been zetten: het min-teken van de spiegel, de hoek buiten $[-90^\circ, 90^\circ]$, graden-minuten-seconden, en het juiste punt bij de juiste rechte.

6.1 Een leerling schrijft voor spiegel 2 ($\beta = 50^\circ$): $\text{rico} = \tan(50^\circ) = +1,192$. Klopt dat? Verbeter indien nodig.

Antwoord:

6.2 De spiegelregel geeft $\tau = -118^\circ$. Een leerling besluit: $\tau = -118^\circ$, dus $\text{rico} = \tan(-118^\circ)$. Wat is er aan de hand en wat is de nette hellingshoek?

Antwoord:

6.3 De gegeven hellingshoek is $\gamma = 53^\circ 28' 45''$. Een leerling typt $\tan(53,2845)$ in de rekenmachine. Waarom is dat fout?

Antwoord:

6.4 Bij het opstellen van r_2 gebruikt een leerling punt C in plaats van punt B. Welke rechte hoort bij welk punt?

Antwoord:

6.5 Een leerling rondt de rico's af op 1 cijfer ($r_2: 0,1$; $s_2: -1,2$) en rekt daarmee D en E uit. Waarom is dat riskant?

Antwoord:

6.6 Waar of niet waar? 'De rico van r_2 is gewoon gelijk aan de draaihoek α van spiegel 1.' Verklaar.

Antwoord: