

Gelijkvormigheid

Oplossingen & ouderhulp • Hoofdstuk 9, Titel 2 & 3 • Wiskunde • 3de jaar

De gouden regel voor de ouder

Geef **nooit meteen het antwoord**, maar stel een vraag. Zo blijft je dochter zelf nadenken en onthoudt ze het beter. Hieronder staat per niveau wat je kan vragen.

De vragenladder

Gebruik deze vragen **in volgorde** en stop zodra je dochter weer verder kan:

1. 'Wat wordt er gevraagd: een factor r , een lengte, een oppervlakte, een volume, of of twee figuren gelijkvormig zijn?'
2. 'Welke zijden en hoeken horen bij elkaar?' (zelfde lettervolgorde)
3. 'Heb je een volledig gekend paar zijden om r te berekenen?' r = beeld / origineel.
4. 'Gaat het over lengte (keer r), oppervlakte (keer r^2) of volume (keer r^3)?'
5. Bij driehoeken: 'Welk kenmerk herken je - ZZZ, HH of ZHZ?'
6. 'Controleer: is je antwoord groter dan het origineel als $r > 1$, en kleiner als $0 < r < 1$?'

Niveau 1 • Eenvoudig - met tips

Een stap per oefening. De tip zegt welke regel je nodig hebt.

Nr.	Opgave	Oplossing (met tussenstappen)
1.1	Twee gelijkvormige figuren. Een zijde van het origineel is 5 cm; de overeenkomstige zijde van het beeld is 15 cm. Bereken de gelijkvormigheidsfactor r .	$r = \text{lengte beeld} / \text{lengte origineel} = 15 / 5 = \mathbf{3}$
1.2	Rechthoek A'B'C'D' is het beeld van rechthoek ABCD met factor $r = 4$. De zijde $ AB = 3$ cm. Hoe lang is de overeenkomstige zijde $ A'B' $?	$ A'B' = r \cdot AB = 4 \cdot 3 = \mathbf{12 \text{ cm}}$
1.3	Twee gelijkvormige figuren met factor $r = 3$. De omtrek van de kleine figuur is 8 cm. Bereken de omtrek van de grote figuur.	$P_{\text{groot}} = r \cdot P_{\text{klein}} = 3 \cdot 8 = \mathbf{24 \text{ cm}}$
1.4	Twee gelijkvormige figuren met factor $r = 2$. De oppervlakte van de kleine figuur is 7 cm^2 . Bereken de oppervlakte van de grote figuur.	$A_{\text{groot}} = r^2 \cdot A_{\text{klein}} = 2^2 \cdot 7 = 4 \cdot 7 = \mathbf{28 \text{ cm}^2}$
1.5	Twee gelijkvormige lichamen met factor $r = 2$. Het volume van het kleine lichaam is 5 cm^3 . Bereken het volume van het grote lichaam.	$V_{\text{groot}} = r^3 \cdot V_{\text{klein}} = 2^3 \cdot 5 = 8 \cdot 5 = \mathbf{40 \text{ cm}^3}$
1.6	Zijn twee willekeurige vierkanten altijd, soms of nooit gelijkvormig? Leg kort uit.	Altijd. Alle hoeken zijn 90° en alle zijden staan in dezelfde verhouding (een vierkant heeft 4 gelijke zijden).

Zo help je als ouder bij niveau 1

- Ga er gerust bij zitten. Laat haar bij elke oefening eerst zeggen WAT er gevraagd wordt: een factor, een lengte, een oppervlakte of een volume?
- Oef. 1.1: vraag 'wat is het beeld en wat is het origineel?' $r = \text{beeld gedeeld door origineel}$.
- Oef. 1.4 en 1.5: vraag 'gaat het over oppervlakte of volume?' Oppervlakte $\rightarrow r$ in het kwadraat, volume $\rightarrow r$ tot de derde.

Niveau 2 • Moeilijker - met tips

Twee stapjes. De tip helpt je op weg.

Nr.	Opgave	Oplossing (met tussenstappen)
2.1	driehoek ABC ~ driehoek PQR. $ AB = 6$, $ PQ = 9$ en $ BC = 8$. Bereken $ QR $.	$r = PQ / AB = 9 / 6 = 1,5 \rightarrow QR = r \cdot BC = 1,5 \cdot 8 = \mathbf{12}$
2.2	driehoek ABC heeft hoek A = 50° en hoek B = 60° . driehoek DEF heeft hoek D = 50° en hoek E = 60° . Zijn de driehoeken gelijkvormig? Met welk kenmerk?	Ja , gelijkvormig met kenmerk HH (twee paar gelijke hoeken).
2.3	Driehoek 1 heeft zijden 3, 4 en 5. Driehoek 2 heeft zijden 9, 12 en 15. Zijn ze gelijkvormig? Met welk kenmerk en welke factor?	$9/3 = 12/4 = 15/5 = 3$. Alle verhoudingen gelijk $\rightarrow$ ja , kenmerk ZZZ , r = 3 .
2.4	Twee gelijkvormige figuren. De oppervlakte van de grote is 9 keer die van de kleine. Bereken de gelijkvormigheidsfactor r.	$r^2 = 9 \rightarrow r = \text{wortel van } 9 = \mathbf{3}$
2.5	Op een plattegrond met schaal 1 : 200 is een muur 4 cm lang. Hoe lang is de muur in werkelijkheid? (in meter)	werkelijkheid = tekening $\cdot 200 = 4 \text{ cm} \cdot 200 = 800 \text{ cm} = \mathbf{8 \text{ m}}$
2.6	Twee gelijkvormige lichamen. Het grote heeft 8 keer het volume van het kleine. Bereken r.	$r^3 = 8 \rightarrow r = \text{derdemachtswortel van } 8 = \mathbf{2}$

Zo help je als ouder bij niveau 2

- Hier zijn twee stapjes nodig. De eerste stap is bijna altijd: bereken eerst r.
- Oef. 2.2 en 2.3: laat haar het kenmerk hardop benoemen (HH, ZZZ of ZHZ) voor ze begint te rekenen.
- Oef. 2.4 en 2.6: vraag 'gaat de verhouding over oppervlakte of volume?' Bij oppervlakte trek je de vierkantswortel, bij volume de derdemachtswortel om r te vinden.

Niveau 3 • Eenvoudig - zonder tips

Zelfde soort als niveau 1, maar nu kies je zelf de regel.

Nr.	Opgave	Oplossing (met tussenstappen)
3.1	Origineel zijde 4 cm, overeenkomstige beeldzijde 10 cm. Bereken r.	$r = 10 / 4 = \mathbf{2,5}$
3.2	driehoek ABC ~ driehoek DEF met $r = 3$. $ AB = 7$. Bereken $ DE $.	$ DE = 3 \cdot 7 = \mathbf{21}$
3.3	Twee gelijkvormige figuren met $r = 5$. Omtrek klein = 6 cm. Bereken de omtrek van de grote.	$P_{\text{groot}} = 5 \cdot 6 = \mathbf{30 \text{ cm}}$
3.4	Twee gelijkvormige figuren met $r = 3$. Oppervlakte klein = 4 cm^2 . Bereken de oppervlakte van de grote.	$A_{\text{groot}} = 3^2 \cdot 4 = 9 \cdot 4 = \mathbf{36 \text{ cm}^2}$
3.5	Twee gelijkvormige lichamen met $r = 3$. Volume klein = 2 cm^3 . Bereken het volume van het grote.	$V_{\text{groot}} = 3^3 \cdot 2 = 27 \cdot 2 = \mathbf{54 \text{ cm}^3}$
3.6	Zijn twee willekeurige cirkels altijd, soms of nooit gelijkvormig? Leg kort uit.	Altijd. Elke cirkel heeft dezelfde vorm; r = de verhouding van de stralen (of diameters).

Zo help je als ouder bij niveau 3

- Nu zonder tips. Zeg de regel niet voor; vraag enkel 'wat is er gevraagd: een factor, een lengte, een oppervlakte of een volume?'
- Verwijs naar de regelkaart vooraan in plaats van het antwoord te geven.
- Dit is even moeilijk als niveau 1. Lukte dat, dan lukt dit ook - dat mag je gerust als bemoediging zeggen.

Niveau 4 • Moeilijker - zonder tips

Twee stappen, nu zelfstandig.

Nr.	Opgave	Oplossing (met tussenstappen)
4.1	driehoek ABC ~ driehoek KLM. $ AB = 10$, $ KL = 4$ en $ AC = 15$. Bereken $ KM $.	$r = KL / AB = 4 / 10 = 0,4 \rightarrow KM = 0,4 \cdot 15 = \mathbf{6}$
4.2	Driehoek 1: $ AB = 4$, $ AC = 6$ en de ingesloten hoek A = 70° . Driehoek 2: $ DE = 6$, $ DF = 9$ en de ingesloten hoek D = 70° . Gelijkvormig? Welk kenmerk?	$ DE / AB = 6/4 = 1,5$ en $ DF / AC = 9/6 = 1,5$, met gelijke ingesloten hoek $\rightarrow$ ja, kenmerk ZHZ .
4.3	driehoek ABC ~ driehoek PQR met $r = 2,5$. De omtrek van driehoek ABC is 12 cm. Bereken de omtrek van driehoek PQR.	$P_{PQR} = 2,5 \cdot 12 = \mathbf{30 \text{ cm}}$
4.4	Twee gelijkvormige figuren. $A_{\text{groot}} = 49 \text{ cm}^2$ en $A_{\text{klein}} = 16 \text{ cm}^2$. Bereken r .	$r^2 = 49/16 \rightarrow r = \text{wortel}(49/16) = 7/4 = \mathbf{1,75}$
4.5	Een maquette van een gebouw is gemaakt op schaal 1 : 50. Een raam op de maquette is 3 cm hoog. Hoe hoog is het echte raam? (in meter)	werkelijkheid = $3 \text{ cm} \cdot 50 = 150 \text{ cm} = \mathbf{1,5 \text{ m}}$
4.6	Twee gelijkvormige kubussen. De grote heeft volume 64 cm^3 , de kleine 8 cm^3 . Bereken r .	$r^3 = 64/8 = 8 \rightarrow r = \text{derdemachtswortel van } 8 = \mathbf{2}$

Zo help je als ouder bij niveau 4

- Twee stappen zonder hulp. Vraag bij elke opgave: 'wat is stap 1?' Meestal: bereken eerst r .
- Oef. 4.2: laat haar controleren of de twee zijdenverhoudingen echt gelijk zijn EN of de gelijke hoek tussen die twee zijden ligt (ingesloten). Pas dan is het ZHZ.
- Oef. 4.4 en 4.6: vraag of de gegeven verhouding over oppervlakte (vierkantswortel) of volume (derdemachtswortel) gaat.

Niveau 5 • Expert

Meerdere stappen in een opgave. Lees goed en stop niet te vroeg.

Nr.	Opgave	Oplossing (met tussenstappen)
5.1	Twee gelijkvormige vazen met factor $r = 3$. De kleine vaas heeft een oppervlakte van 200 cm^2 en een inhoud van 0,5 liter. Bereken de oppervlakte EN de inhoud van de grote vaas.	$A_{\text{groot}} = r^2 \cdot 200 = 9 \cdot 200 = \mathbf{1800 \text{ cm}^2}$; $V_{\text{groot}} = r^3 \cdot 0,5 = 27 \cdot 0,5 = \mathbf{13,5 \text{ liter}}$.
5.2	Marius (1,50 m) staat naast een boom. Zijn schaduw is 2 m lang, de schaduw van de boom 9 m. De zon valt onder dezelfde hoek, dus de driehoeken zijn gelijkvormig. Bereken de hoogte van de boom.	hoogte / 1,50 = 9 / 2 $\rightarrow$ hoogte = 1,50 $\cdot$ 9/2 = 1,50 $\cdot$ 4,5 = 6,75 m .
5.3	De lijnstukken [AC] en [BD] snijden elkaar in S. Er geldt: driehoek SAB $\sim$ driehoek SCD (overstaande hoeken in S, en AB $\parallel$ CD). SA = 4, SB = 5 en SC = 12. Bereken SD .	SA / SC = SB / SD $\rightarrow$ 4/12 = 5/ SD $\rightarrow$ SD = 5 $\cdot$ 12 / 4 = 15 .
5.4	In driehoek ABC ligt D op [AB] en E op [AC], met DE $\parallel$ BC. Daardoor is driehoek ADE $\sim$ driehoek ABC. AD = 3, AB = 8 en DE = 4,5. Bereken BC .	$r = AB / AD = 8/3 \rightarrow BC = DE \cdot 8/3 = 4,5 \cdot 8/3 = 36/3 = \mathbf{12}$.
5.5	Een schaalmodel van een auto is gemaakt op schaal 1 : 18. Het model heeft 600 cm^2 lak nodig. Hoeveel m^2 lak heeft de echte auto nodig? ($1 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$)	$r = 18 \rightarrow A_{\text{echt}} = r^2 \cdot 600 = 324 \cdot 600 = 194\,400 \text{ cm}^2 = \mathbf{19,44 \text{ m}^2}$.
5.6	Twee gelijkvormige figuren. De oppervlakte van de grote is 144 cm^2 , die van de kleine 36 cm^2 . De omtrek van de kleine is 24 cm. Bereken (a) de factor r en (b) de omtrek van de grote figuur.	(a) $r^2 = 144/36 = 4 \rightarrow r = \mathbf{2}$. (b) $P_{\text{groot}} = r \cdot 24 = 2 \cdot 24 = \mathbf{48 \text{ cm}}$.

Zo help je als ouder bij niveau 5

- Expert: meerdere stappen. De valkuil is te vroeg stoppen, of de verkeerde macht (r , r^2 of r^3) kiezen.
- Oef. 5.1: vraag apart 'oppervlakte $\rightarrow$ welke macht van r ?' en 'inhoud $\rightarrow$ welke macht van r ?'
- Oef. 5.2 en 5.4 (schaduw / evenwijdige): laat haar de twee gelijkvormige driehoeken aanduiden en de overeenkomstige zijden naast elkaar zetten voor ze de evenredigheid opschrijft.
- Oef. 5.3 (snijdende lijnen): vraag welke hoeken gelijk zijn (overstaande hoeken in het snijpunt) en welke zijden dan bij elkaar horen.

Niveau 6 • Instinkers - let op de valstrikken!

Opgaven die je expres op het verkeerde been zetten. Lees twee keer en controleer.

Nr.	Opgave	Oplossing (met tussenstappen)
6.1	Waar of niet waar? 'Als je alle zijden van een figuur verdubbelt, wordt de oppervlakte 2 keer zo groot.' Verklaar.	NIET waar. De oppervlakte wordt $r^2 = 2^2 = 4$ keer zo groot, niet 2 keer.
6.2	Waar of niet waar? 'Als je alle ribben van een kubus 3 keer zo lang maakt, wordt het volume 9 keer zo groot.' Verklaar.	NIET waar. Het volume wordt $r^3 = 3^3 = 27$ keer zo groot, niet 9 keer.
6.3	Waar of niet waar? 'Twee rechthoeken met dezelfde omtrek zijn altijd gelijkvormig.' Verklaar.	NIET waar. Een rechthoek 2×6 en een rechthoek 3×5 hebben allebei omtrek 16, maar de zijdenverhoudingen ($2/6$ vs $3/5$) verschillen → niet gelijkvormig.
6.4	Gegeven driehoek ABC ~ driehoek DEF. Iemand schrijft $ AB / EF = r$. Klopt dat? Verklaar.	NIET correct. Overeenkomstige zijden volg je in dezelfde lettervolgorde: $ AB $ hoort bij $ DE $ (niet bij $ EF $). Juist is $ AB / DE = r$.
6.5	Waar of niet waar? 'Twee gelijkbenige driehoeken zijn altijd gelijkvormig.' Verklaar.	NIET waar. Een gelijkbenige driehoek kan een scherpe of een stompe tophoek hebben; de hoeken hoeven niet gelijk te zijn. (Twee gelijkzijdige driehoeken zijn wel altijd gelijkvormig.)
6.6	Kan de gelijkvormigheidsfactor r gelijk zijn aan -2 ? Verklaar.	Nee. De gelijkvormigheidsfactor r is altijd positief ($r = k $, de absolute waarde van de homothetiefactor). Een lengte-verhouding kan niet negatief zijn.

Zo help je als ouder bij niveau 6

- Instinkers - hier help je het meest door te laten controleren, niet door te verbeteren.
- Oef. 6.1 en 6.2: laat haar een concreet voorbeeld nemen (bv. een vierkant van 1 op 1, dan 2 op 2) en de oppervlakte/volume echt narekenen. Zo ziet ze keer 4 en keer 27.
- Oef. 6.3: vraag of ze twee verschillende rechthoeken met omtrek 16 kan vinden - kloppen hun zijdenverhoudingen?
- Oef. 6.4: laat haar de letters onder elkaar zetten: A-B-C en D-E-F. Welke zijde hoort bij welke?
- Oef. 6.6: vraag 'kan een lengte ooit negatief zijn?' Daar gaat het over.

Niveau 7 • Examenklaar - zoals in de cursus

Op het niveau en in de stijl van de cursusoefeningen. Combineer alles. Tip van de lerares: hermaak ook de oefeningen uit de les.

Nr.	Opgave	Oplossing (met tussenstappen)
7.1	driehoek ABC ~ driehoek DEF. Gegeven: $ AB = 25$, $ AC = 15$, $ DE = 5$ en $ EF = 6$. Bereken r , $ BC $ en $ DF $.	Koppel de letters: A-D, B-E, C-F. $r = AB / DE = 25/5 = 5$. $ BC = r \cdot EF = 5 \cdot 6 = 30$. $ DF = AC / r = 15/5 = 3$.
7.2	Een schaalmodel van een virus heeft een diameter van 8 cm. Het echte virus heeft een diameter van 80 nanometer ($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$). Bereken de gelijkvormigheidsfactor.	$8 \text{ cm} = 8 \cdot 10^{-2} \text{ m}$; $80 \text{ nm} = 80 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 8 \cdot 10^{-8} \text{ m}$. $r = 8 \cdot 10^{-2} / 8 \cdot 10^{-8} = 10^6 = 1\ 000\ 000$.
7.3	In een rechthoekige driehoek ABC zijn de rechthoekszijden $ AB $ en $ AC $ gelijk aan 3 en 5. In een rechthoekige driehoek TME met hoek $M = 90^\circ$ is $ ME = 6$. Bereken $ MT $ zodat de driehoeken gelijkvormig zijn. Geef ALLE oplossingen.	De rechte hoeken (A en M) horen bij elkaar; voor de andere twee zijden zijn er twee mogelijkheden: Geval 1: $ ME $ hoort bij $ AB \rightarrow r = 6/3 = 2 \rightarrow MT = 2 \cdot 5 = 10$. Geval 2: $ ME $ hoort bij $ AC \rightarrow r = 6/5 = 1,2 \rightarrow MT = 1,2 \cdot 3 = 3,6$.
7.4	Twee gelijkvormige cilinders. De kleine heeft straal 4,5 cm en hoogte 12 cm. De grote heeft een volume dat 8 keer zo groot is. Bereken (a) de factor r en (b) de hoogte van de grote cilinder.	(a) $r^3 = 8 \rightarrow r = 2$. (b) $\text{hoogte}_{\text{groot}} = r \cdot 12 = 2 \cdot 12 = 24 \text{ cm}$.
7.5	Een driehoekig perceel ABC staat op een kaart met schaal 1 : 1000. Op de kaart is de oppervlakte van de driehoek 12 cm^2 . Bereken de werkelijke oppervlakte in m^2 . ($1 \text{ m}^2 = 10\ 000 \text{ cm}^2$)	$r = 1000 \rightarrow A_{\text{echt}} = r^2 \cdot 12 = 1\ 000\ 000 \cdot 12 = 12\ 000\ 000 \text{ cm}^2 = 1200 \text{ m}^2$.
7.6	driehoek ABC en driehoek EDC zijn rechthoekig met de rechte hoeken in A en E. De punten A, C en E liggen op een rechte; de hoeken bij C zijn overstaande hoeken. (a) Toon aan dat de driehoeken gelijkvormig zijn. (b) Bereken $ DE $ als $ AB = 6$, $ AC = 4$ en $ CE = 10$.	(a) hoek A = hoek E = 90° en de hoeken bij C zijn overstaande hoeken (gelijk) $\rightarrow$ kenmerk HH $\rightarrow$ driehoek ABC ~ driehoek EDC. (b) $ AB / DE = AC / CE \rightarrow 6/ DE = 4/10 \rightarrow DE = 6 \cdot 10 / 4 = 15$.

Zo help je als ouder bij niveau 7

- Examenklaar - precies het niveau en de stijl van de cursusoefeningen. De technieken zijn dezelfde als in niveau 1-6, maar verpakt in een context.
- Oef. 7.1: laat haar eerst de overeenkomstige letters koppelen (A-D, B-E, C-F) voor ze rekent.
- Oef. 7.3: dit heeft TWEE oplossingen. Vraag 'kan de zijde van 6 bij de 3 horen, of bij de 5?' Beide gevallen geven een geldig antwoord.
- Oef. 7.2 en 7.5: let op de eenheden! Zet alles eerst om naar dezelfde eenheid (meter, cm) voor je deelt of vermenigvuldigt.